To stop or Not to stop:
確率と止め時問題

平成３０年１１月１０日　経済学部同窓会東京支部　第５３回経済懇話会

京都大学経済学研究科　江上雅彦

問題1　景品あてクイズ（モンティ･ホール問題）

ルール：まず箱を選んでもらって、司会者は出演者（あなた）が選んだ以外の空箱を一つ開ける。

司会者：「3つの箱 A，B，Cのうち、1つの箱には高価な賞品が入っています。
どれを選びますか？」

あなた：「 Bにします」

司会者：「私はどの箱に賞品が入っているか知っています。試しにAを開けてみますので、
後から変えてもかまいません」

（ルール上、司会者はあなたが選んだBの箱を開けることはできません）

司会者：「ごらんのとおりAは空ですね（笑）。 さてどうしましょう？
あなたはBを選んでおられますが、Cに変えてもよろしいですよ！」

あなた：「･････････････」

（答え） Cに変えたほうがよい。

まず普通に選ぶとき賞品を獲得する確率は1/3ですから、ハズレを選んでいる確率の方が大きいです。

司会者がAを選んで開けるには事情があります。

○　Bに賞品が入っている場合（当たりを選んでいる場合）・・・・AとCのどちらを開けても構わない。

○　Cに賞品が入っている場合・・・・ルール上、あなたが選んでいるBは開けられないので Aを開けざるを得ない。

　Bに賞品が入っている場合にはAを$\frac{1}{2}$ の確率で開き、 Cに賞品が入っている場合にはAを確率１で開けることになります。

もともと P（Aに賞品）＝P(Bに賞品）＝P（Cに賞品）＝$\frac{1}{3}$ でしたが、 Aが開けられたという事実を考慮しますと

P（Bに賞品｜司会者が空のAを選ぶ）＝$\frac{1}{3}$　P（Cに賞品｜司会者が空のAを選ぶ）＝$\frac{2}{3}$

赤字の部分は条件　赤字の部分は条件

問題2　カジノ解禁

最初は1万円賭けます。確率1/2で勝つゲーム（ルーレットの赤／黒など）を行います。

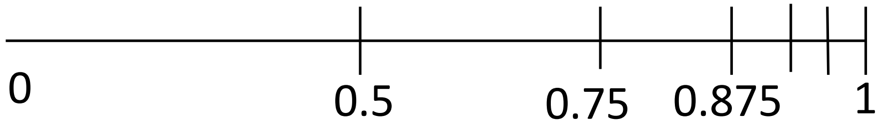
負けた方は、次の勝負では倍の2万円を賭けなければなりません。

2回連続で負けた場合（確率は1/4）、3回目の勝負ではその倍の4万円賭けることになります。

カジノに持っていったお金がなくなるとゲームをやめなければなりません。

………

$$P(\text{いつか勝つ})=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots=1$$



いつかはお金を取り戻すことができますが、では平均しますと

（＝何度もこのゲームをやってみますと、あるいは、大勢が同時に1回ずつゲームをするとしますと）

初めて1回勝つまでに賭けなければいけないお金はいくらでしょうか？

可能性としては	①確率	②それまでの掛金（万円）	③掛け合わせると	④勝った時カジノからもらうお金	⑤もうけ（=④ ー ②）
1回目で勝つ	$\frac{1}{2}$	1	$1 \times \frac{1}{2}$	1万円	1万円
2回目で初めて勝つ	$\frac{1}{4}$	1+2=3	$3 \times \frac{1}{4}$	2万円	1万円
3回目で初めて勝つ	$\frac{1}{8}$	1+2+4=7	$7 \times \frac{1}{8}$	4万円	1万円
4回目で初めて勝つ	$\frac{1}{16}$	1+2+4+8=15	$15 \times \frac{1}{16}$	8万円	1万円
5回目で初めて勝つ	$\frac{1}{32}$	1+2+4+8+16 =31	$31 \times \frac{1}{32}$	16万円	1万円
・・・・・・・・・・・・・・・					

（答え）平均すると無限大になる。

何回目で初めて勝つかは分かりませんので、すべての可能性を考えるために③の数字を足しあげます。

⇒その和が１度勝つために掛けるお金の平均です。

前の表で、試しに5回までを足してみますと

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{8}\right)+\left(1-\frac{1}{16}\right)+\left(1-\frac{1}{32}\right) =$$

$$(1+1+1+1+1)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)$$

すべての可能性を考えるため、さらに足していくと、左側のカッコは∞に発散しますが、右側のカッコは1に収束よって、初めて勝つまでに賭けなければいけないお金は平均すると無限大です。

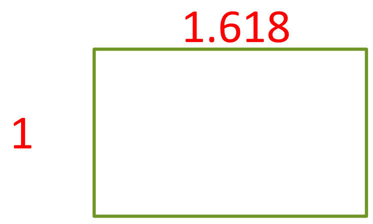
問題3　コイン投げに現れるフィボナッチ数列

フィボナッチ数は、0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89・・・と続きます。

○　直前の2つの数を加えたものが、次の数になります。

○　花弁の数、パイナップルや松かさに見られる螺旋の数など自然界 に見られる不思議な数の集まり。

○ 隣り合う2つの数の比を計算すると$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}$・・・1.6180339.....（黄金比）に近づく。



(問題)「コイン投げで2回続けて表」をちょうど6回で達成するパターンは何とおりあるか？

1回で達成	不可能	0とおり
2回で達成	○○	1とおり
3回で達成	×○○	1とおり
それでは・・・		
4回で達成	○×○○	
	××○○	2とおり
5回で達成	○××○○	
	×○×○○	
	×××○○	3とおり

（答え）６回で達成するのは5とおり。
コインを**何回か**投げて「２回連続」を達成するパターンに**フィボナッチ数**が現れる。

６回投げて「連続２回」を（６回目に）達成するのは何パターンあるか？

最初のtossがうらの場合、キッチリあと5回で「連続２回表」を出さなければなりません。

最初のtossが表の場合、次も表ですと終わってしまいますから、２回目はうら。

　そしてキッチリあと4回で「連続２回表」を出さなければなりません。

４回目で達成は2とおり、５回目で達成は3とおり⇒　６回目で達成は２＋３＝5とおり。

同様に7回目で「連続２回」を達成するのは、３＋５＝8とおり・・・・・・

問題4　ファイナルアンサー

整数値 1, 2, ….., 8 のいずれかからスタートします。

コインを投げて、おもての場合は＋1、うらの場合は―1移動するとします。

（例えば、5からスタートして、最初がおもてなら6へ、最初がうらなら4へ移動します）

ゲームを止めるときに、賞金がもらえますが、0あるいは9に行くとゲームオーバーです。

止める場所 i	1	2	3	4	5	6	7	8
賞金　S (i) =	3	8	12	7	5	8	4	1.5

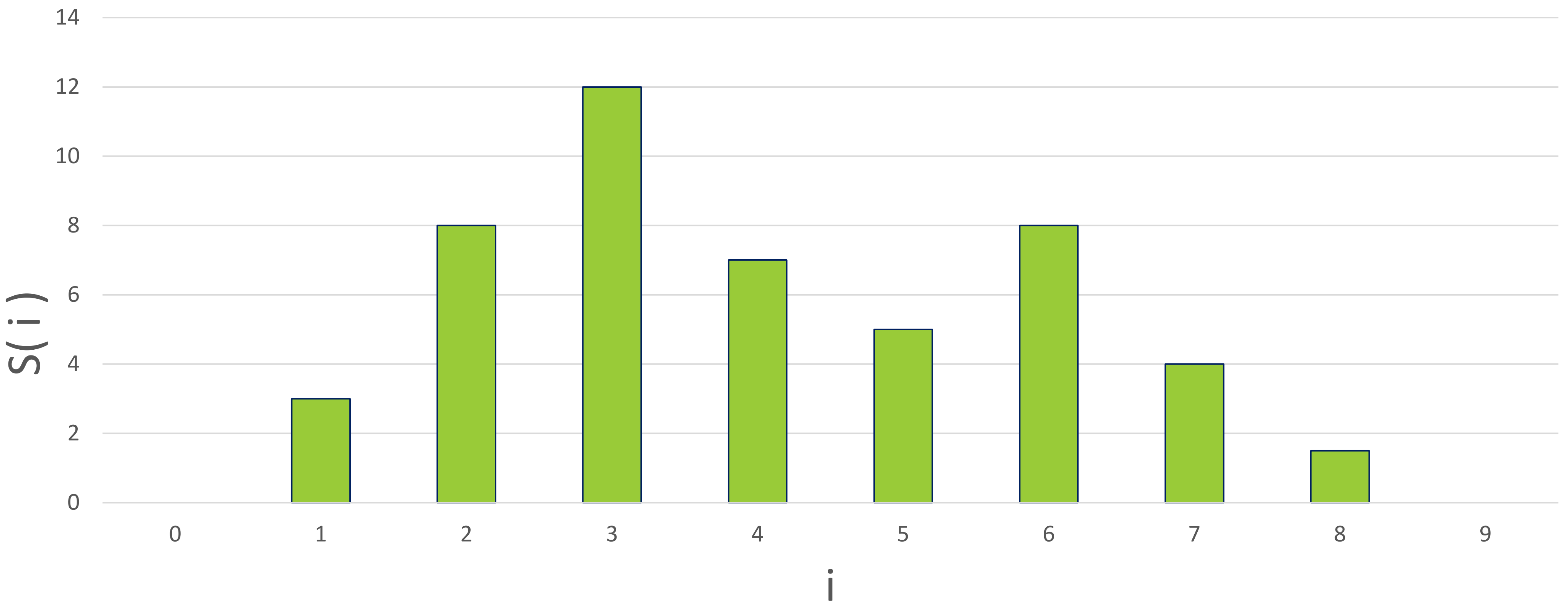
（ルール） 2から始めます。

- その場で止めますか？
- 続けるとした場合、うらが出て、1に行きました。1で止めますか？・・・・

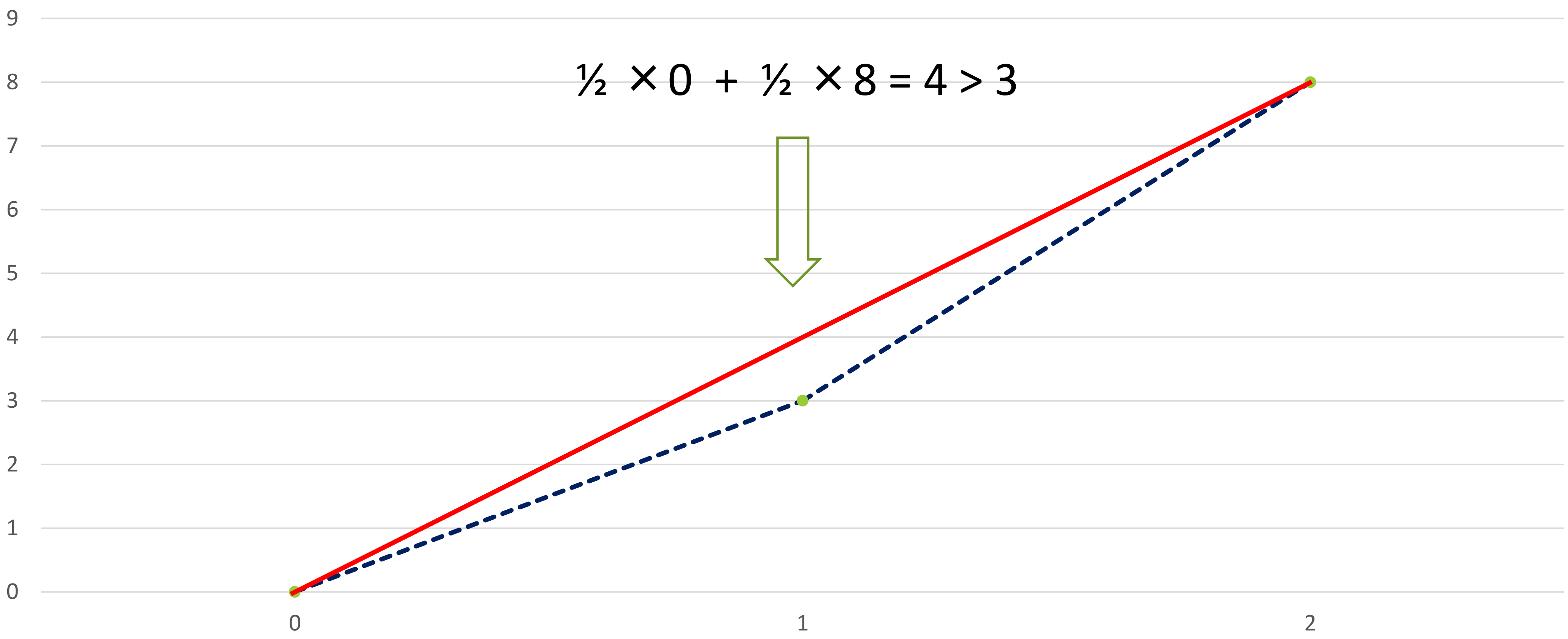
  もちろん3までくれば止めるべきです。5にいるときは続けるべきです。

ある点で、「続ける」と判断するということは、その点で賞金をもらってしまうより、将来得をする場合のみ！

賞金Ｓ（ｉ）のグラフ



1にいるとき・・・次がおもてなら8、うらなら0
➡続ける場合の賞金の平均は4



最適解の性質

点 i からスタートして、最適な行動を取るときに得られる価値を $v(i)$ とします。

明らかに $v(0) = v(9) = 0$ ですが、他の $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$ ではどうでしょうか？

まず前ページより $v(i) \geq S(i)$

各点 i からは、1/2の確率で点 i-1 へ、1/2の確率で点 i+1 へ動きます。

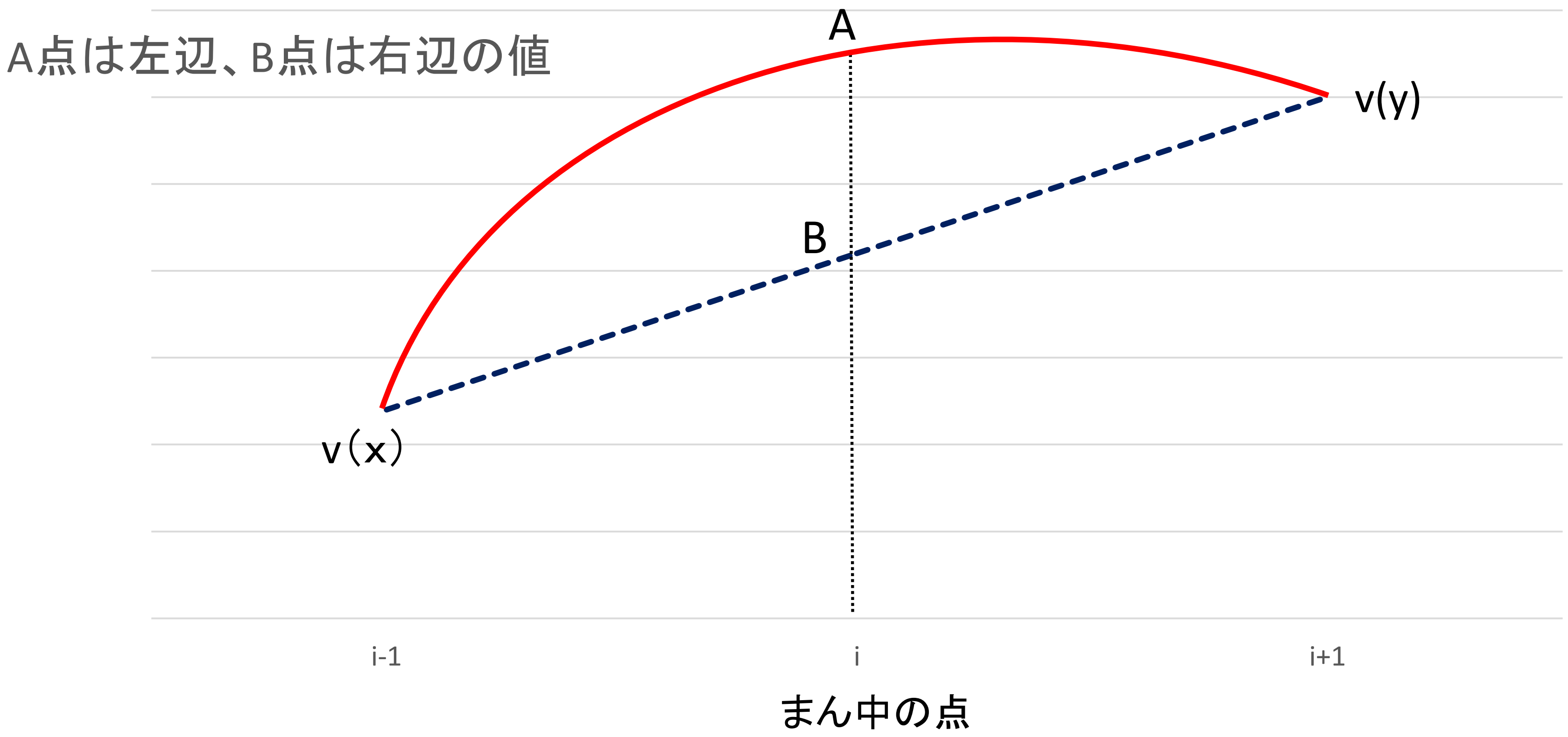
そしてそれぞれの点における価値、$v(i-1)$ あるいは $v(i+1)$ を獲得します。

⇒ （点 iで続ける場合の価値の平均） ＝ $\frac{1}{2} \times v(i-1) + \frac{1}{2} \times v(i+1)$ ですが、

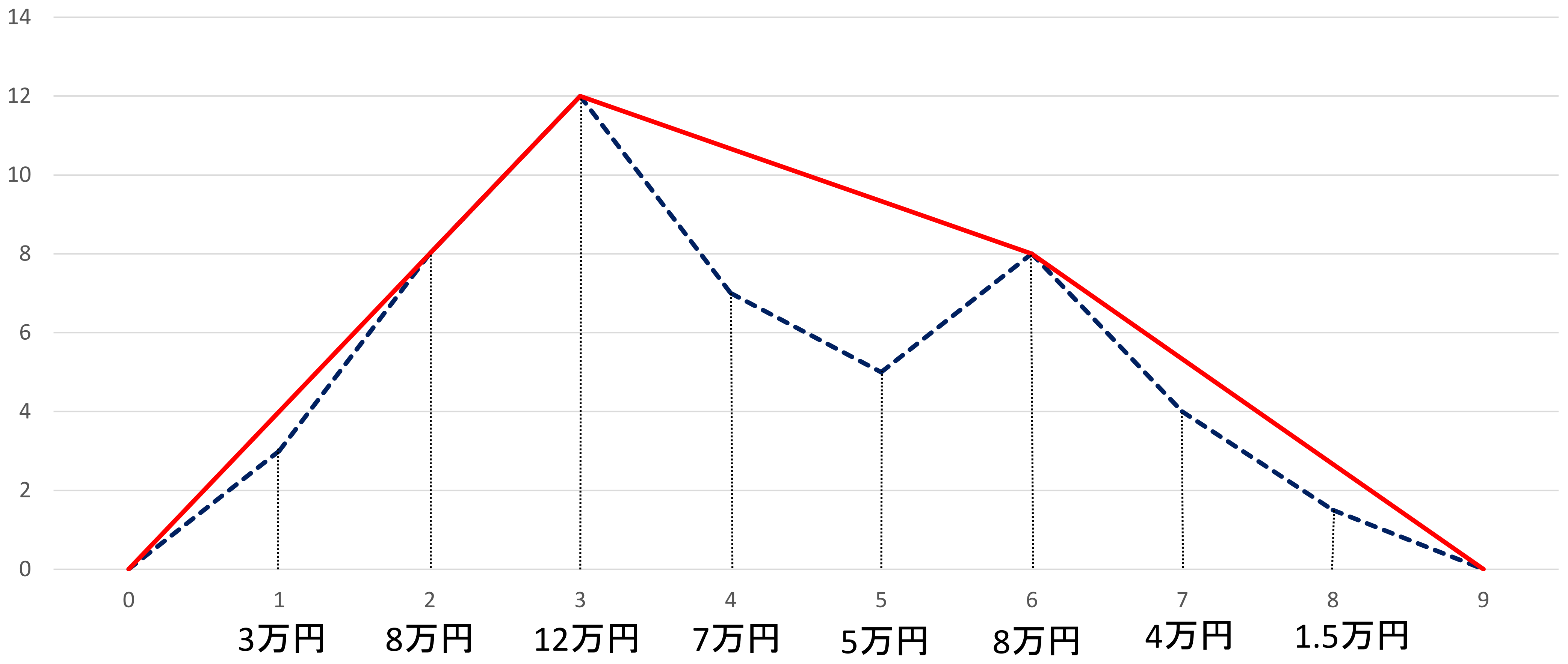
$$v(i) \geq \frac{1}{2} v(i-1) + \frac{1}{2} v(i+1)$$

(理由)「続ける」というのは1つの戦略ですから、「最適な」戦略を取って得られる価値$v(i)$ より大きくなることはありません。

凹関数　$v\ (i) > \frac{1}{2}(v(i-1) + v(i+1))$



（答え）2, 3, 6 にいるときに止める



問題5　株式の売りどき

X (t):　t 時点の株価

　ある時点から次の時点へ動くとき、どのような値を取るかは不確実

　しかし「それぞれの値をどれくらいの確率で取るか（＝分布）」は分かります。

M (t): 0時からt 時点までのXの最高値

ゲームのルール

○止める時刻をτ としますと、その時刻までの最大値M(τ)がもらえます。

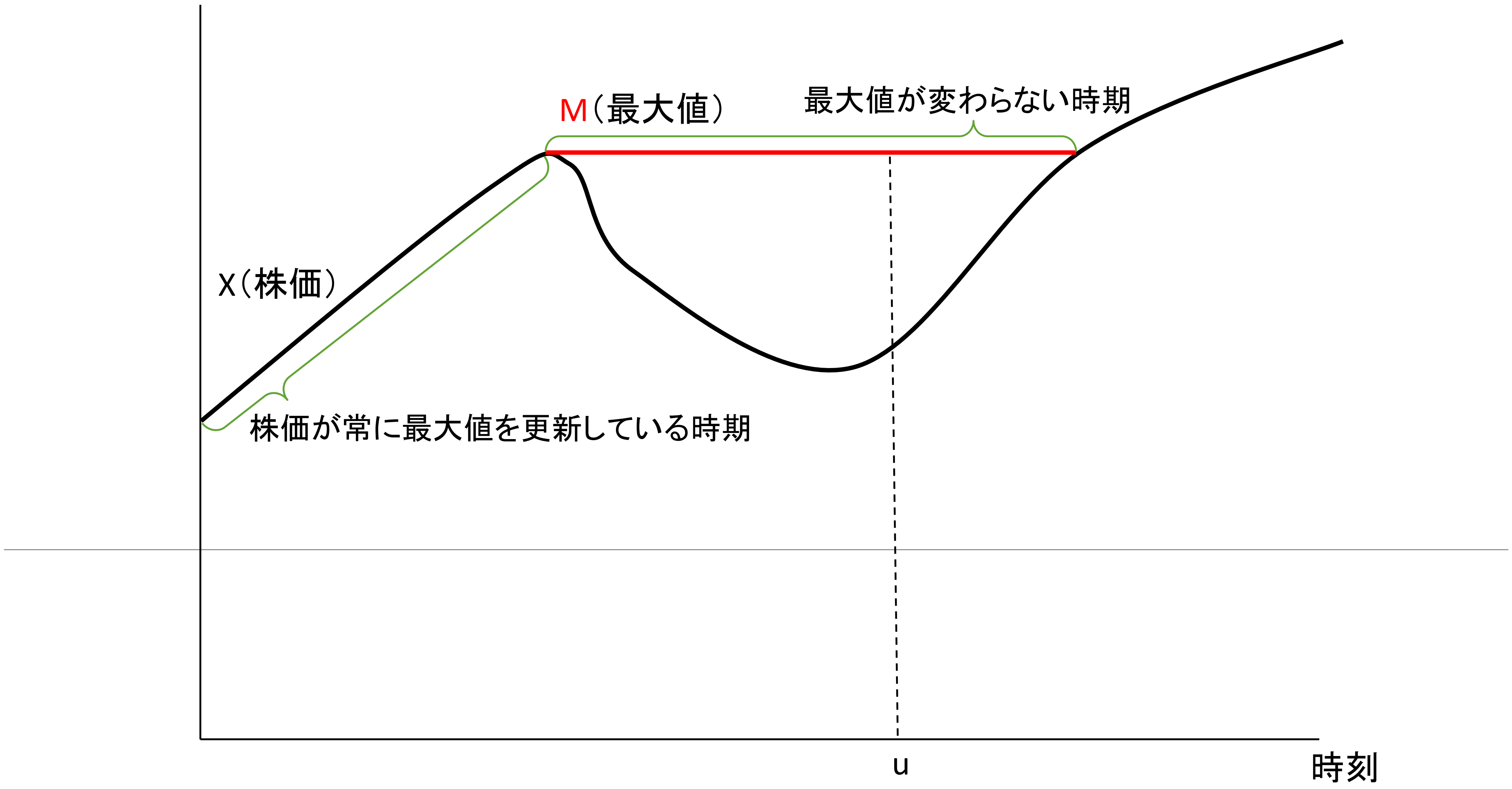
（＝止めたときの株価X(τ)が最大値M(τ)より、小さくともM(τ)は確保されます）

○しかし続けている時間に応じて、減価してしまいます。

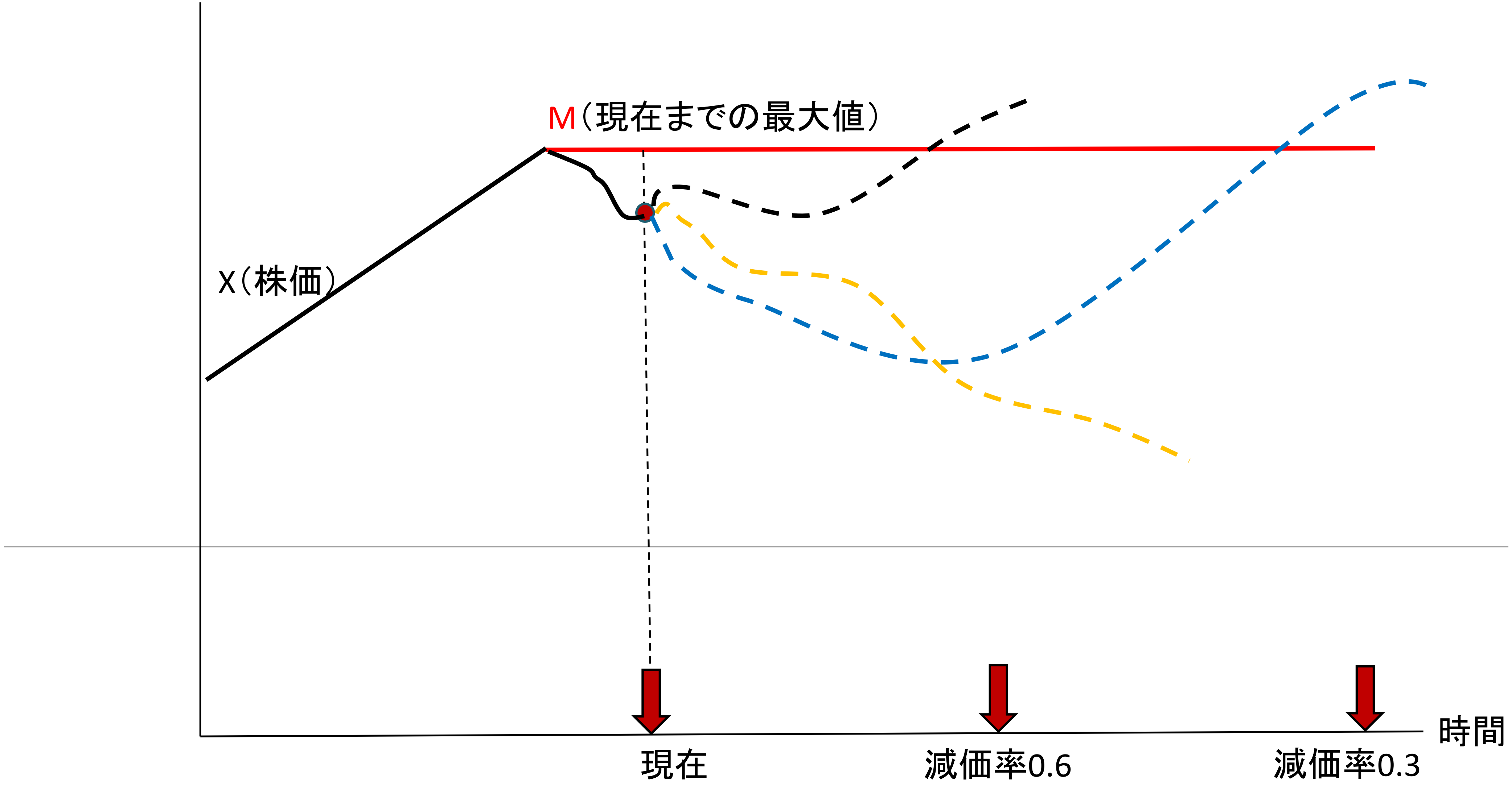
○つまり、止めたときに正味もらえるのは、（減価率）×（止める時点までの最大値）M(τ)です。

　長く続けると、より高い最大値に行けますが、減価するのでその分もらえるお金は少なくなります。

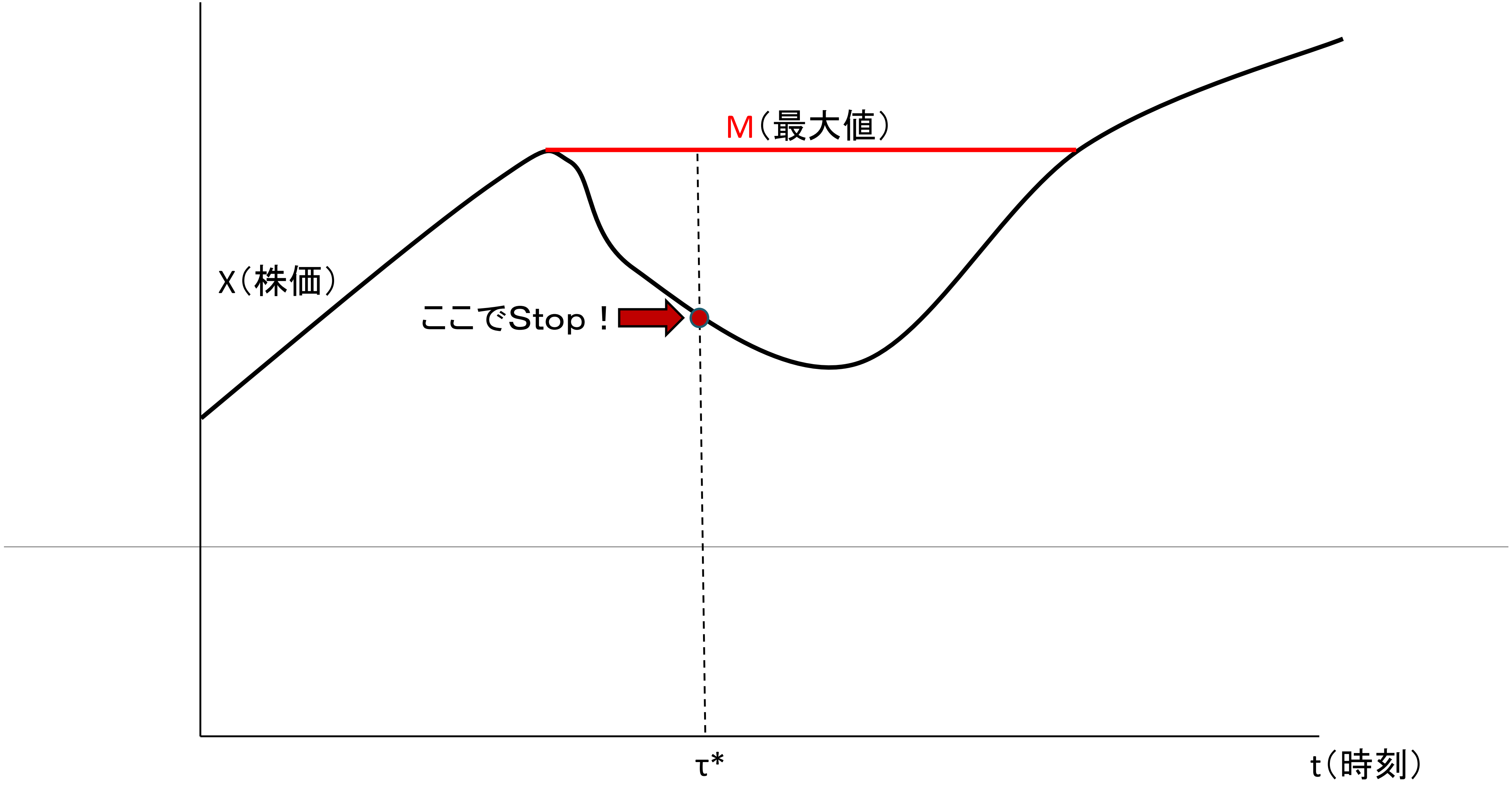
どこで止めるべきでしょうか？


M（最大値）
最大値が変わらない時期
X（株価）
株価が常に最大値を更新している時期
u
時刻

どこでSTOP？



答えのイメージ



（答え）いままでの最大値が5のときは、3.92までは最大値を更新することを期待して我慢する。

青いグラフ　・・・・止めたときに受け取る価値、ただしスケールを変えています。F（5）=1233.9

赤いグラフ・・・・・変換された空間における最適な行動を取るときの価値

[420.8, 1233.9]では、赤＞青

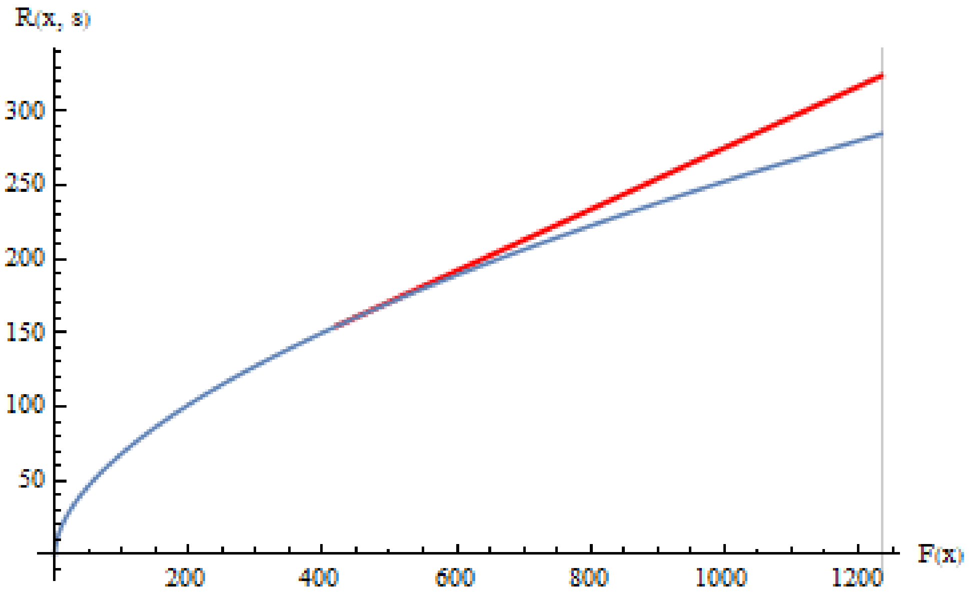
⇒この区間では株価が最大値5を更新するのを期待して（ストップしないで）続ける。

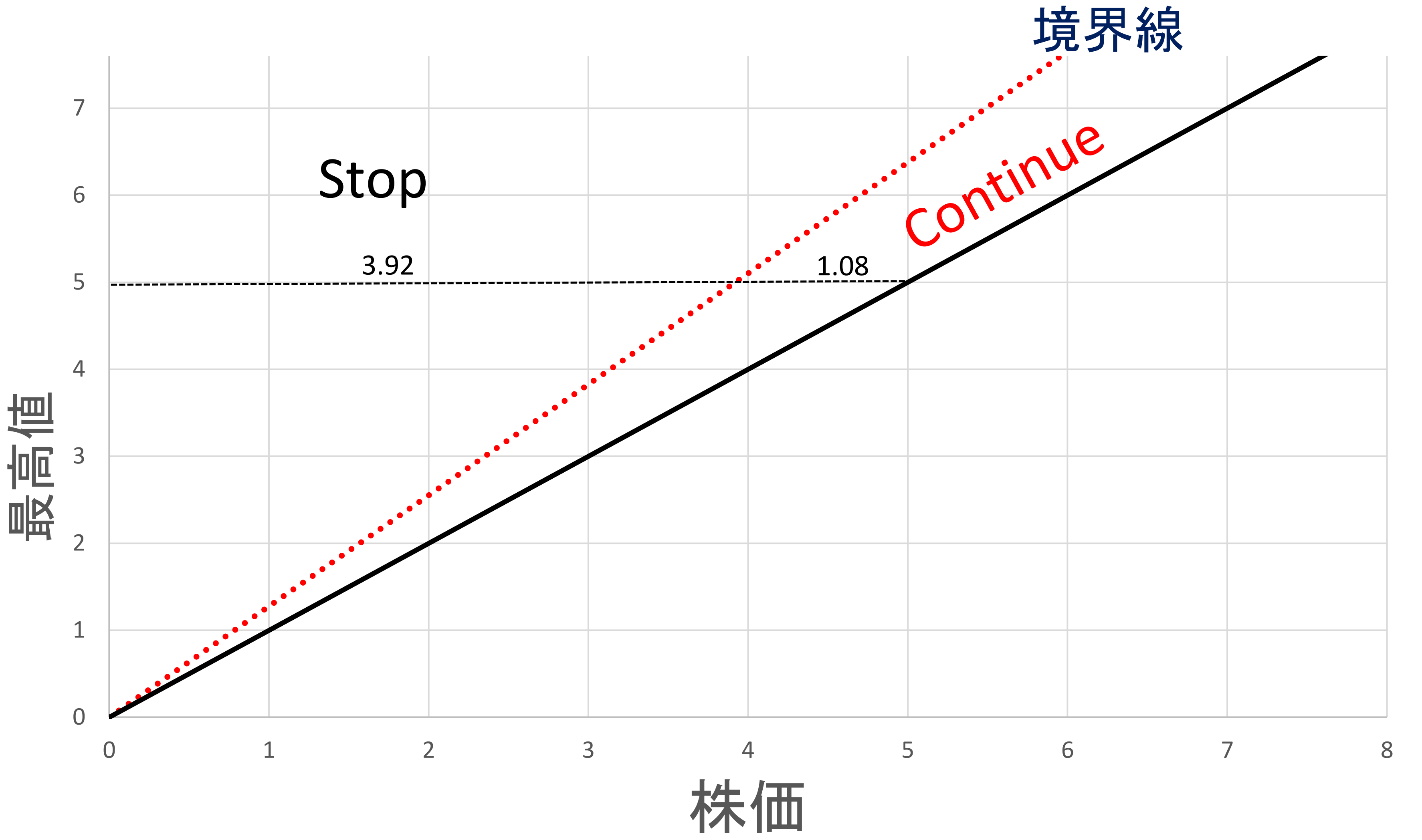
２つのグラフは[0, 420.8]では一致

ただしF（3.92）=420.8

⇒株価が3.92まで下がったらあきらめて止める。

（5を受け取ります）




境界線
Stop
Continue
3.92
1.08
最高値
株価
0
1
2
3
4
5
6
7
8

ご清聴ありがとうございました。

京都大学経済学部100周年記念式典

2019年10月19日（土）
ウエスティン都ホテル京都

タイムスケジュール（予定）

- 理　事　会　：　12:00～14:00　2階 比叡の間
- 総　　　会　：　14:00～14:30　4階 瑞穂の間
- 講　演　会　：　14:40～15:50　4階 瑞穂の間
- 記念 式典　：　16:00～17:00　4階 瑞穂の間
- 祝　賀　会　：　17:00～19:00　4階 瑞穂の間